数理解析研究所講究録
408巻 1980年 128-136

ユークリッド空間における部分多様体のガウス写像

武藤義夫

ここで述べるのは表題に属する諸問題のうちで Gauss image が動かないような部分多様体の変形に関するものである。

§1. 部分多様体の変形.

微分可能写像 $\tilde{x}: M \times I \to R^n$ において M は m 次元 compact orientable C^∞ manifold, I は 0 を含むある開区間とし, I の1点 t に制限した場合の写像を $\tilde{x}|_t: M \times t \to R^n$ と書く。次の仮定をおく,

仮定 (i) $\tilde{x}|_t: M \times t \to R^n$ は各 $t \in I$ において正則な部分多様体である。

(ii) Γ を Gauss map とすると $p \in M$, $t \in I$ に対して

$$\Gamma(p, t) = \Gamma(p, 0)$$

である。

ここではこの仮定をみたす deformation のみを考えるゆえ deformation といえばそう解釈する。

定義　$\tilde{x}|_t$ を局所的に $x^h = x^h(u^1, \cdots, u^m; t)$ で表わす。ここに

$$h, i, j, \cdots = 1, \cdots, n; \quad \kappa, \lambda, \mu, \cdots = 1, \cdots, m$$

とし，x^h は R^n の直交座標，u^κ は M の局所座標である。このとき deformation の条件は

$$\frac{\partial^2 x^h}{\partial t\, \partial u^\lambda} = a_\lambda{}^\sigma \frac{\partial x^h}{\partial u^\sigma}$$

と書かれるが，$a_\lambda{}^\kappa$ が成分である (1, 1)-tensor を <u>tensor of deformation</u>，$X^h = \partial x^h / \partial t$ を <u>vector of deformation</u> という。$\tilde{x}|_t$ により R^n から M へ induce された Riemannian metric, Riemannian connection は $g(t)$, $\nabla(t)$ とかく。平行移動および相似変換による deformation は <u>trivial deformation</u> という。

Fundamental formulas [2]　いろいろな計算の基礎になる式を記す。

$$B_\lambda^h = \frac{\partial x^h}{\partial u^\lambda},$$

$$g_{\mu\lambda} = B_\mu^h B_\lambda^h,$$ （R^n における summation convention により $\sum_h$ を省略する）

$$H_{\mu\lambda}{}^{h} = \partial_\mu B_\lambda^h - \left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\} B_\varkappa^h \qquad (\partial_\mu = \partial/\partial u^\mu)$$

これらに対して $\partial B_\lambda^h/\partial t = a_\lambda{}^\sigma B_\sigma^h$ からはじまって次の諸式がみちびかれる。

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial t} = a_{\mu\lambda} + a_{\lambda\mu}, \qquad (a_{\mu\lambda} = a_\mu{}^\varkappa g_{\varkappa\lambda})$$

$$\frac{\partial \left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}}{\partial t} = \nabla_\mu a_\lambda{}^\varkappa = \nabla_\lambda a_\mu{}^\varkappa,$$

$$\frac{\partial H_{\mu\lambda}{}^{h}}{\partial t} = a_\mu{}^\sigma H_{\sigma\lambda}{}^h = a_\lambda{}^\sigma H_{\sigma\mu}{}^h。$$

$\nabla(t)$ の curvature tensor $K_{\nu\mu\lambda}{}^\varkappa$ については

$$\frac{\partial K_{\nu\mu\lambda\varkappa}}{\partial t} = K_{\nu\mu\sigma\varkappa}\, a_\lambda{}^\sigma + K_{\nu\mu\lambda\sigma}\, a_\varkappa{}^\sigma。$$

定義　$\partial\left\{{\varkappa \atop \mu\lambda}\right\}/\partial t = 0$ をみたす deformation を <u>affine deformation</u> という。$\nabla_\mu a_\lambda{}^\varkappa = 0$ がその必要十分条件である。

§2. Tensor of deformation の性質.

まずすでに述べたように $\nabla_\mu a_\lambda{}^\varkappa = \nabla_\lambda a_\mu{}^\varkappa$ が成り立つ。

<u>定理 1.</u>　$\nabla_\lambda a^{\lambda\varkappa} = 0$ なら $\nabla_\mu a_\lambda{}^\lambda = 0$, $a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}$.

証明.　積分式を計算すれば

$$\int_M \nabla_\mu a_\varkappa{}^\mu \nabla_\lambda a^{\varkappa\lambda} * 1 = \int_M \nabla_\varkappa a_\mu{}^\mu \nabla_\lambda a^{\varkappa\lambda} * 1$$

$$= -\int_M a_\mu{}^\mu \nabla_\varkappa \nabla_\lambda a^{\varkappa\lambda} * 1 = -\int_M a_\mu{}^\mu \nabla_\lambda \nabla_\varkappa a^{\varkappa\lambda} * 1$$

は $\nabla_\varkappa a^{\varkappa\lambda} = 0$ によって消えるゆえ $\nabla_\lambda a^{\varkappa\lambda} = 0$, $\nabla_\mu a_\lambda{}^\lambda = 0$ となる。この結果を用いてうる等式

$$\nabla_\mu (a^{\mu\lambda} \partial_\lambda X^h) = \nabla_\mu (a^{\lambda\mu} \partial_\lambda X^h)$$

に $\partial_\lambda X^h = \partial^2 x^h / \partial t \partial u^\lambda = a_\lambda{}^\sigma B_\sigma^h$ を代入すれば

$$\int_M B_\mu^h a^{\mu\lambda} a_\lambda{}^\sigma B_\sigma^h * 1 = -\int_M x^h \nabla_\mu (a^{\mu\lambda} a_\lambda{}^\sigma B_\sigma^h) * 1,$$

$$\int_M B_\mu^h a^{\lambda\mu} a_\lambda{}^\sigma B_\sigma^h * 1 = -\int_M x^h \nabla_\mu (a^{\lambda\mu} a_\lambda{}^\sigma B_\sigma^h) * 1$$

の右辺が一致することから

$$\int_M a^{\mu\lambda} a_{\lambda\mu} * 1 = \int_M a^{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} * 1,$$

したがって $a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}$ をうる.

§3. Affine deformations.

Deformation $\tilde{x} : M \times I \to R^n$ が affine deformation で M が単連結なら，$(M, g(t))$ はリーマン多様体の積に分解され，$\tilde{x}$ もこれに応じて各成分が trivial deformation になるように分解される[3]。ここでは affine deformation に関係するその他の定理を述べる。

<u>定理 2.</u> Deformation $\tilde{x} : M \times I \to R^n$ において

$$\nabla_\lambda a^{\lambda\varkappa} = 0$$

が成り立ち，しかも curvature tensor, Ricci tensor, tensor of deformation の間に不等式

$$K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a^{\nu\varkappa} a^{\mu\lambda} - K_{\mu\lambda} a^{\mu\rho} a_\rho{}^\lambda \leqq 0$$

が成り立てば，$\tilde{x}$ は affine deformation である。

証明.

$$\int_M \nabla_\nu a_{\mu\lambda} \nabla^\nu a^{\mu\lambda} * 1 = \int_M \nabla_\mu a_{\nu\lambda} \nabla^\nu a^{\mu\lambda} * 1$$

$$= -\int_M a_{\nu\lambda} \nabla_\mu \nabla^\nu a^{\mu\lambda} * 1$$

$$= -\int_M a_{\nu\lambda} (K^\nu{}_\sigma a^{\sigma\lambda} + K_\mu{}^\nu{}_\sigma{}^\lambda a^{\mu\sigma}) * 1$$

$$= \int_M (K_{\nu\mu\lambda\varkappa} a^{\nu\varkappa} a^{\mu\lambda} - K_{\mu\lambda} a^{\mu\rho} a_\rho{}^\lambda) * 1 \leqq 0$$

したがって $\nabla_\nu a_{\mu\lambda} \nabla^\nu a^{\mu\lambda} = 0$, $\nabla_\mu a_\lambda{}^\varkappa = 0$ となる。

系 3. Deformation $\tilde{x}$ において $\tilde{x}|_0$ が平坦なリーマン接続をもち deformation の tensor が恒等的に $\nabla_\lambda a^{\lambda\varkappa} = 0$ をみたせば，$\tilde{x}$ は affine deformation である。

証明. $K_{\nu\mu\lambda\varkappa}$ が $t = 0$ で消えれば恒等的に消えるからである。

注意. $g(t)$ が正の定曲率（その値は t によって変ってよ

い）であるとこの定理が適用されるが，定曲率の $g(t)$ をもつ deformation は $m>2$ なら trivial であるからよい例とはいえない。

§4. $\nabla_\mu a^{\mu\lambda}=0$ をみたす deformation.

$\nabla_\mu a^{\mu\lambda}=0$ をみたすが affine ではない deformation が存在するかという問題はまだ解けていない。しかし $\nabla_\mu a^{\mu\lambda}=0$ の幾何学的意味を考えてみる。

まずM上の Riemannian metric の空間 $\mathfrak{M}$ において曲線 $\varphi: I' \to \mathfrak{M}$ を $\varphi(s)$ $(s \in I')$ によって与えるとき，これが $\varphi(0)$ を始点として harmonic であるとは，M の identity map による $(M, \varphi(0)) \to (M, \varphi(s))$ が各 $s \in I'$ について harmonic map であることと定義する。$(M, \varphi(s))$ の基本テンソル $\varphi_{\mu\lambda}(s)$ の作る Christoffel's symbol を $\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}_s$ とすればその条件式は

$$\left(\left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}_s - \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}_0 \right) \varphi^{\mu\lambda}(0) = 0$$

であるから，特に $s=0$ において

$$\varphi^{\mu\lambda} \frac{\partial \left\{ {\kappa \atop \mu\lambda} \right\}}{\partial s} = 0$$

が成り立つ。

<u>定理4.</u> Deformation $\tilde{x}: M \times I \to R^n$ が $\nabla_\mu a^{\mu\lambda}=0$ を

みたすことは，$\tilde{x}$によってひきおこされる$\mathfrak{M}$の曲線$\gamma: I \to \mathfrak{M}$すなわち$\gamma(t)=g(t)$，$t \in I$が次の性質をもつことと同値である，

各$t \in I$に対して$\gamma(t)$を始点$\varphi_t(0)$とする$\mathfrak{M}$のharmonic curveで，$s=0$ではγと$\gamma(t)$において接するものが存在する。

証明は$\partial\left\{ {\varkappa \atop \mu\lambda} \right\} / \partial t = \nabla_\mu a_\lambda{}^\varkappa$，$\nabla_\mu a^{\mu\varkappa}=0$と$\varphi_t(0) = g(t)$から容易である。

§5．幾何学的解釈[4]．

まず次の定理を述べる。

<u>定理5．</u> Deformation $\tilde{x}: M \times I \to R^n$において次の２条件(i)，(ii)は同値である，

(i)　$\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$

(ii)　$\nabla_\mu (a^{\mu\lambda} + a^{\lambda\mu}) = 0$。

証明．(i)→(ii)は定理１から明らかであるから(ii)を仮定すると

$$0 \leqq \int_M \nabla_\nu a_\lambda{}^\nu \nabla_\mu a^{\lambda\mu} * 1 = -\int_M \nabla_\lambda a_\nu{}^\nu \nabla_\mu a^{\mu\lambda} * 1$$

$$= \int_M a_\nu{}^\nu \nabla_\lambda \nabla_\mu a^{\mu\lambda} * 1 = \int_M a_\nu{}^\nu \nabla_\mu \nabla_\lambda a^{\mu\lambda} * 1$$

$$= -\int_M \nabla_\mu a_\nu{}^\nu \nabla_\lambda a^{\mu\lambda} * 1 = -\int_M \nabla_\nu a_\mu{}^\nu \nabla_\lambda a^{\mu\lambda} * 1 \leqq 0$$

から $\nabla_\lambda a^{\mu\lambda} = 0$ をうる。よってまた $\nabla_\lambda a^{\lambda\mu} = 0$ となる。

$a_{\mu\lambda} + a_{\lambda\mu} = \partial g_{\mu\lambda}/\partial t$ であるから $\nabla_\mu (a^{\mu\lambda} + a^{\lambda\mu}) = 0$ には次のような意味がある。

$\mathcal{D} = \{\eta\}$ を M の diffeomorphism の群とする。Pull back により $\mathcal{D}$ は $\mathfrak{M}$ に作用し，$g \in \mathfrak{M}$, $\eta \in \mathcal{D}$ に対して $g \to \eta^*(g)$ がきまる。g を $\mathfrak{M}$ の固定された1点とすると Berger and Ebin [1] により $\mathcal{D}$ の g を含む orbit における g のある近傍 U と map $\chi: U \to \mathcal{D}$ とで次のごときものが存在する,

$$\eta^*(g) \in U \text{ なら } (\chi(\eta^*(g)))^*(g) = \eta^*(g)。$$

また $\mathfrak{M}$ の g を含む submanifold S で次のごときものが存在する：$F(u, s) = (\chi(u))^*(s)$, $u \in U$, $s \in S$ を用いて $F: U \times S \to \mathfrak{M}$ とするとき F は $U \times S$ から $\mathfrak{M}$ における g のある近傍への diffeomorphism で，g における S の接空間は δ を局所的には

$$\delta: \ s_{\mu\lambda} \to -\nabla^\mu s_{\mu\lambda} \qquad (s_{\mu\lambda} = s_{\lambda\mu})$$

で表わされる写像 $\delta: S^2 \to T_1$ とするとき δ の kernel である。ただし S^2 は対称な $(0, 2)$-tensor field の線形空間，T_1 は 1-form の空間とする。これによって考えると，$g(0)$

を上述の g として，$\tilde{x}$ が与える $g(t)$ は S 上にあることになる。こうして次の定理をうる。

定理 6. S を M の Riemannian metric の空間 $\mathcal{M}$ における上述のごとき部分空間で，1つの Riemannian metric g をとおるものとする。Deformation $\tilde{x}$ において $g(t)$ が $g(0) = g$ であるとき，さらに $g(t)$ が S 上にあるための必要十分条件は $\nabla_\mu a^{\mu\lambda} = 0$ である。

文　献

[1] Berger, M. and D. Ebin, *Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold*, J. Differential Geometry 3 (1969), 379 − 392.

[2] Mutō, Y., *Deformability of a submanifold in a Euclidean space whose image by the Gauss map is fixed*, Proc. Amer. Math. Soc. 76 (1979), 140 − 144.

[3] Mutō, Y., *Deformation of a submanifold in a Euclidean space with fixed Gauss image*, to appear in Geometriae Dedicata.

[4] Mutō, Y., 同上，II, to appear in Geometriae Dedicata.